MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION

DURÉE : 3 heures

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soient f et g deux fonctions réelles, définies et continues sur le segment $[a, b]$.

Montrer que, pour tout nombre réel λ, on a :

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(t)dt + 2\lambda \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b g^2(t)dt \geqslant 0$$

et en déduire l'inégalité :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)dt\right) \times \left(\int_a^b g^2(t)dt\right).$$

I

On désigne par E l'ensemble des fonctions réelles, f, définies et continues sur $[0, +\infty[$ et telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ soit convergente.

1° Démontrer que si f et g sont deux éléments de E, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$$

est absolument convergente.

(On pourra appliquer la question préliminaire aux deux fonctions $t \longmapsto e^{-\frac{t}{2}} |f(t)|$ et $t \longmapsto e^{-\frac{t}{2}} |g(t)|$.)

En déduire que E est un espace vectoriel réel.

2° Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ converge et calculer sa valeur.

En déduire que les restrictions à $[0, +\infty[$ des fonctions polynômes réelles appartiennent à E.

3° Pour f et g éléments de E, on pose

$$(f|g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt.$$

a. Vérifier, pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de E et tout couple (λ, μ) de nombres réels, les relations suivantes :

$$(f \mid g) = (g \mid f) \quad ;$$
$$(\lambda f + \mu g \mid h) = \lambda (f \mid h) + \mu (g \mid h) \; ;$$
$$(h \mid \lambda f + \mu g) = \lambda (h \mid f) + \mu (h \mid g) \; ;$$
$$(f \mid f) \geqslant 0.$$

b. Établir l'équivalence :

$$(f \mid f) = 0 \iff f = 0.$$

II

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit l'application $P_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[\quad , \quad P_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n).$$

$\left(\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)\right.$ désigne la dérivée d'ordre n de l'application $t \longmapsto e^{-t}t^n$.

$\left.\text{La dérivée d'ordre 0 d'une application } f \text{ est } f.\right)$

1° Établir que P_n est la restriction à $[0, +\infty[$ d'une fonction polynôme de degré n.

Calculer ses coefficients.

2° Tracer les graphes de P_0, P_1, P_2, P_3.

.../...

×164× INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE & E.N.S.A. 1977

3° Montrer que si P est la restriction à $[0, +\infty[$ d'une fonction polynôme :

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} P(t) \frac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)\,dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n \frac{d^n}{dt^n}[P(t)]\,dt.$$

4° En déduire que, pour $m < n$, $(P_m \mid P_n) = 0$,
et calculer $(P_n \mid P_n)$ pour $n \geqslant 0$.

III

On se propose d'établir, pour $n \geqslant 2$, la relation :

$$(2) \quad P_n(t) + t\,P_{n-1}(t) = (2n-1)\,P_{n-1}(t) - (n-1)^2\,P_{n-2}(t)$$

1° Montrer que les fonctions $P_0, P_1, \ldots, P_n$ constituent une base de l'espace vectoriel formé des restrictions à $[0, +\infty[$ des fonctions polynômes nulle ou de degré inférieur ou égal à n.

2° Montrer qu'il existe des nombres réels uniques $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que l'on ait :

$$P_n(t) + t\,P_{n-1}(t) = a_{n-1}P_{n-1}(t) + a_{n-2}P_{n-2}(t) + \ldots + a_1 P_1(t) + a_0 P_0(t).$$

3° Établir que pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, on a la relation

$$a_i(P_i \mid P_i) = (tP_{n-1} \mid P_i) = (P_{n-1} \mid tP_i).$$

Établir également $a_{n-2}(P_{n-2} \mid P_{n-2}) = -(P_{n-1} \mid P_{n-1})$.

4° Déduire de la question précédente et de la relation (1) du II. 3° la valeur des coefficients a_i.

IV

1° Pour $n \geqslant 1$, déduire de l'égalité $(P_n \mid P_0) = 0$ établie au II. 4° que P_n s'annule sur $[0, +\infty[$.

2° Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $t_1, t_2, \ldots, t_r$ la suite strictement croissante des éléments de $\mathbb{R}_+$ où P_n s'annule en changeant de signe, et on pose $Q(t) = (t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_r)$.

Montrer que la fonction $t \longmapsto P_n(t)\,Q(t)$ garde sur $\mathbb{R}_+$ un signe constant.

En déduire que $r = n$, et que P_n admet n zéros simples dans $[0, +\infty[$.

3° On désigne par x_n le plus grand zéro de P_n. $(n \geqslant 1)$.

A l'aide de la relation (2) établie au III, prouver

a. que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

b. que, $\forall n \geqslant 1$, $x_n \geqslant 2n - 1$.

La question IV *est indépendante de* III, *à condition d'admettre la relation* (2).

×165×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail